

ÎNCĂLZIREA CARCASELOR PRIN CURENȚI TURBIONARI

Valeriu ȘTEFAN-MINCULETE, Mihai MARICARU, Marius Aurel COSTEA, Ioan Florea HĂNȚILĂ
*Universitatea "Politehnica" din București, Spl. Independenței 313, 060042, București;
mihai.maricaru@upb.ro*

Stelian MARINESCU
ICPE S.A., Spl. Unirii 313, Bucharest, 030138, București

Rezumat. Pentru analiza încălzirii carcaselor din materiale conductoare neferomagnetice prin curenți turbionari se poate adopta un model foarte simplu de calcul al câmpului electromagnetic, în care o soluția analitică poate fi obținută. Deoarece excitația poate conține un spectru bogat de armonice, o procedură deosebit de eficientă de determinare a pierderilor prin conducție și a evoluției încălzirii carcasei este dată de descompunerea problemei în serie de funcții proprii spațiale. Soluția obținută prin calcul este verificată prin măsurători experimentale.

1 Introducere

Utilizarea curenților turbionari la conversia energiei câmpului electromagnetic în căldură este frecvent aplicată în procesele de electrotermie din ingineria electrică, având câteva mari avantaje: piesele pot fi încălzite volumic, adâncimea de pătrundere și valoarea pierderilor prin curenți turbionari pot fi ușor controlate prin frecvența și valoarea curentului sau tensiunii de excitație, timpii de încălzire pot fi determinați cu suficient de bună precizie, tehnologia este nepoluantă, etc. Un exemplu concret, aflat în atenția specialiștilor din cadrul Centrului 3 Servomotoare al ICPE S.A., este încălzirea carcaselor de aluminiu, care, prin dilatare, se montează peste carcasa din tole feromagnetice ale servomotoarelor fără perii.

Problemele de curenți turbionari în regim sinusoidal se rezolvă în complex, prin soluționarea unei ecuații Helmholtz cu necunoscută complexă. În regimul periodic, se descompune soluția în serie Fourier, fiecare componentă fiind obținută prin utilizarea imaginilor în complex. Metodele numerice utilizate pentru soluționarea ecuației curenților turbionari sunt cele diferențiale, integrale și hibride. Cea mai populară și, totodată cea mai utilizată metodă numerică diferențială este metoda elementului finit (FEM), în care soluția se aproximează cu o combinație liniară de funcții de formă și se proiectează ecuația diferențială pe un set de funcții "test". Pentru definirea funcțiilor de "formă" și a celor de "test", se utilizează o rețea de discretizare spațială careia i se asociază elementele nodale sau, în structurile 3D, elemente de muchie [1]-[3]. Metoda se remarcă prin flexibilitate, permițând calculul câmpului electromagnetic în aproape orice configurație geometrică, cu medii neomogene și, uneori, neliniare. Are dezavantajul că domeniul de calcul este mărginit și că introduce surse de suprafață parazite pe interfețele dintre subdomeniile rețelei de discretizare (chiar și în aer). Dar cel mai important dezavantaj specific calculului problemelor de curenți turbionari constă în faptul că pentru a obține o acuratețe corespunzătoare a soluției, rețeaua de discretizare spațială trebuie să fie puternic neuniformă, mult îndesită în vecinătatea suprafețelor corpurilor conductoare, dată fiind adâncimea de pătrundere a câmpului electromagnetic. Această neuniformitate este cu atât mai mare, cu cât frecvența este mai mare. În cazul regimului periodic, nu mai avem controlul adâncimii de pătrundere și nu putem adapta finețea rețelei de discretizare.

Metoda hibrida FEM – elemente de frontieră, aplică FEM în corpurile conductoare, condiția de frontieră rezultând prin metoda elementelor de frontieră (BEM), care tratează soluția în aer. Metoda nu introduce surse parazite și poate fi aplicată în spații nemărginite. Matricea sistemului are dimensiuni mai mici dar se “umple” în comparație cu FEM și își pierde simetria. Se păstrează dezavantajul adaptării rețelei de discretizare la adâncimea de pătrundere.

Ecuția integrală a densității de curent (ECIE) este deosebit de eficientă, având ca necunoscută curentul indus în mediile conductoare, care intra direct în calculul pierderilor. Pentru discretizarea spațială se folosesc elementele de suprafață (în structuri 2D), sau elemente de muchie (în structuri 3D [3]). ECIE poate fi extinsă și la medii neliniare, folosind metoda de punct fix a polarizatiei [4], [5]. Din păcate, și ECIE suferă de dezavantajul major al adaptării rețelei de discretizare spațială la adâncimea de pătrundere.

Metodele analitice sunt singurele care conduc la o soluție de mare acuratețe a problemei de curenți turbionari, indiferent de frecvența mărimilor câmpului electromagnetic. Metodele analitice nu pot fi aplicate la medii neliniare și au marele dezavantaj că geometria domeniului de calcul trebuie să fie foarte simplă, permițând soluționarea analitică a problemei Sturm-Liouville [6], [7]. Trebuie subliniat faptul că, în afara coordonatelor carteziene, funcțiile proprii sunt funcții speciale, care îngreunează mult obținerea rezultatelor numerice. Cărțile de matematici aplicate au acordat multă atenție studierii acestor funcții, au propus aproximații pentru comportarea asimptotică a acestor funcții speciale, precum și formule de aproximare a valorilor proprii (vezi, de exemplu [8], [9]). Din păcate efortul de calcul al acestor funcții speciale nu justifică întotdeauna adoptarea metodelor analitice.

Și în cazul metodelor analitice, efortul de calcul crește atunci când regimul este periodic, fiind necesară descompunerea soluției în serie Fourier și soluționarea pe armonice. Pentru soluționarea regimului periodic, M. Vasiliu a propus descompunerea soluției în serie de funcții proprii spațiale [10]-[14]. Din păcate procedura nu a putut fi finalizată cu rezultate numerice decât pentru configurații deosebit de simple, unde au putut să fie determinate valorile proprii. În [15] este propusă o metodă deosebit de eficientă de calcul al valorilor proprii, bazată pe principiul contracției și metoda propusă de M. Vasiliu, care poate fi aplicată și la carcasa conductoare. În această lucrare se folosește metoda descompunerii soluției în funcții proprii spațiale pentru a determina pierderile prin curenți turbionari și timpul de încălzire al carcaselor.

2 Câmpului electromagnetic în carcasa conductoare

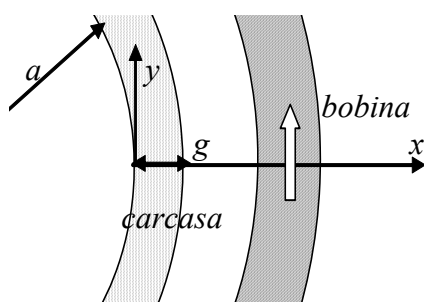


Fig.1. Domeniul de calcul

O bobina cu N spire, parcursă de curentul sinusoidal i (Fig.1.1), înconjoară concentric carcasa ce urmează să fie încălzită prin curenți turbionari. Grosimea carcasei este g , diametrul interior a , conductivitatea σ și permeabilitatea magnetică μ , constante în toată carcasa. Diametrul exterior al carcasei este $b = a + g$, iar lungimea ei este l . Admițând că grosimea g este mult mai mică decât diametrul interior a , putem adopta coordonatele carteziene. Intensitatea câmpului magnetic \mathbf{H} este orientată axial, pe direcția axei oz , $\mathbf{H} = kH_z = kH(x, t)$ iar potențialul vector \mathbf{A} , intensitatea câmpului electric \mathbf{E} și densitatea de curent

\mathbf{J} sunt orientate pe direcția coordonatei y , de exemplu, $\mathbf{E} = \mathbf{j}E_y = \mathbf{j}E(x, t)$. Ecuțiile câmpului electromagnetic sunt:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1) \qquad -\frac{\partial H}{\partial x} = \sigma E \quad (2)$$

Potențialul magnetic vector verifică relațiile

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \mu H \quad (3) \qquad E = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad (4)$$

În zonele lipsite de densitate de curent, intensitatea câmpului magnetic este constantă (2), și de aici rezultă că între carcasa și bobină $H = \frac{\mu N}{l} i$ și din (3) avem condiția de frontieră

pentru potențialul vector la $x=g$: $\left. \frac{\partial A}{\partial x} \right|_{x=g} = \frac{\mu N}{l} i$. Integrând potențialul magnetic vector pe fața

interioară a carcasei, rezultă $2\pi a A|_{x=0} = \pi a^2 \mu_0 H|_{x=0}$ și, ținând cont de (3), avem condiția de frontieră pentru potențialul magnetic vector pe fața interioară a carcasei:

$A_{x=0} = \frac{a}{2} \frac{1}{\mu_r} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{x=0}$. Înlocuind (4) în (2) și ținând cont de (3) rezultă ecuația diferențială a potențialului magnetic vector

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \mu \sigma \frac{\partial A}{\partial t} \quad (5)$$

3 Funcțiile și valorile proprii

Se poate arăta ușor [15] că operatorul $-\frac{d^2(\bullet)}{dx^2}$ este pozitiv definit și simetric pe spațiul vectorial $L^2(0, g)$, al funcțiilor cu condiții de frontieră nule. Rezultă că există funcțiile proprii Φ_k și valorile proprii λ_k^2 care verifică ecuația

$$-\frac{d^2 \Phi_k}{dx^2} = \lambda_k^2 \Phi_k \quad (6)$$

Se deduce expresia funcțiilor proprii normate

$$\Phi_k = \frac{\sin \lambda_k x + \alpha_k \cos \lambda_k x}{Z_k} \quad (7)$$

unde $Z_k = \sqrt{\frac{g}{2} \left(1 + \alpha_k^2 + \frac{a}{2g\mu_r} \right)}$ și $\alpha_k = \frac{a\lambda_k}{2\mu_r}$.

Ecuația valorilor proprii este

$$\text{ctg } \lambda_k g = \frac{a\lambda_k}{2\mu_r} \quad (8)$$

Ecuația (8) are câte o soluție pentru argumentul $\lambda_k g$ aparținând fiecărui interval

$\left((k-1)\pi, (k-1)\pi + \frac{\pi}{2} \right)$, $k \in N^*$. Notăm $z_k = \lambda_k g - \frac{\pi}{2} - (k-1)\pi$, și

$$\lambda_k = \frac{1}{g} \left(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi + z_k \right) \quad (9)$$

Ecuația (8) devine

$$\operatorname{tg} z_k = -\frac{\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi + z_k}{g} \frac{a}{2\mu_r} \quad (10)$$

și are câte o soluție $z_k \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$. Putem aplica acum funcția arctg în relația (10) obținând ecuația

$$f_k(z_k) = z_k + \operatorname{arctg} \frac{\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi + z_k}{g} \frac{a}{2\mu_r} = 0 \quad (11)$$

Funcția f_k este lipschitziană și uniform crescătoare, deoarece $\frac{df_k}{dz} \in (1, 2r_k + 1)$, unde

$$r_k = \frac{ag\mu_r}{(2g\mu_r)^2 + (a(k-1)\pi)^2} \quad (12)$$

Putem folosi metoda Picard-Banach pentru rezolvarea ecuației (11), căutând punctul fix al contracției $g_k(z) = z - \gamma_k f_k(z)$, unde $\gamma_k = \frac{1}{1+r_k}$. Pentru fiecare număr natural k , funcția

$g_k(z)$ are un punct fix z_k , și din (9), obținem valorile proprii λ_k . Dacă oprim iterațiile din șirul Picard-Banach la iterația n , eroarea față de soluția exactă z_k^* poate fi evaluată cu relația

$$\left| z_k^{(n)} - z_k^* \right| < \frac{\theta_k}{1-\theta_k} \left| z_k^{(n)} - z_k^{(n-1)} \right|, \text{ unde } \theta_k = \frac{r_k}{1+r_k} \text{ este factorul de contracție al lui } g_k. \text{ Pentru}$$

$k > 3$ sunt suficiente cel mult 4 iterații pentru a obține o eroare aproape nulă ($< 10^{-20}$). Pentru valori mai mari ale argumentului (la $k > 3$), valorile proprii se apropie de forma asimptotică

$$\lambda_k \cong \frac{(k-1)\pi}{g}, \text{ cu care se poate inițializa șirul Picard-Banach.}$$

3 Potențialul magnetic vector descompus în serie de funcții proprii spațiale

Scriem

$$A(x, t) = A_f(x, t) + \sum_k C_k(t) \Phi_k(x) \quad (13)$$

unde A_f este o componenta care preia condițiile de frontieră. O formă simplă pentru A_f

poate fi: $A_f(x, t) = q(t) \left(x + \frac{a}{2\mu_r} \right)$ cu $q(t) = \frac{\mu N}{l} i(t)$. Înlocuim (13) în (5), ținând cont de (6)

și de ortogonalitatea funcțiilor proprii, rezultă ecuația diferențială a coeficienților C_k

$$\beta_k C_k(t) + \frac{C_k(t)}{dt} = -\frac{dq}{dt} \int_0^g \left(x + \frac{a}{2\mu_r} \right) \Phi_k dx = -W_k \frac{dq}{dt} \quad (14)$$

unde $\beta_k = \frac{\lambda_k^2}{\mu\sigma}$ și $W_k = \int_0^g \left(x + \frac{a}{2\mu_r} \right) \Phi_k dx = \frac{\left[\left(\frac{a}{2\mu_r} \right)^2 + \frac{1}{\lambda_k^2} \right] \sin \lambda_k g}{Z_k}$. Ecuația (14) are soluția

$$C_k(t) = C_k(0)e^{-\beta_k t} - W_k \int_0^t \frac{dq}{d\tau} e^{-\beta_k(t-\tau)} d\tau \quad (15)$$

Dacă dorim să obținem soluția periodică a ecuației (15), atunci punem în relația (15) condiția de periodicitate $C_k(T) = C_k(0)$, și, ținând cont că $q(T) = q(0)$, avem

$$C_k(0) = W_k \left(\frac{1}{e^{-\beta_k T} - 1} \int_0^T \frac{dq}{d\tau} e^{-\beta_k(T-\tau)} d\tau \right). \quad (16)$$

După câteva calcule [15] se obține

$$A(x, t) = \frac{\mu N i(t)}{l} \left(x + \frac{a}{2\mu_r} \right) - \frac{\mu N}{l} \sum_k W_k \left(U_k e^{-\beta_k t} \int_0^T \frac{di}{d\tau} e^{-\beta_k(T-\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{di}{d\tau} e^{-\beta_k(t-\tau)} d\tau \right) \Phi_k(x) \quad (17)$$

unde $U_k = \frac{1}{1 - e^{-\beta_k T}}$.

3 Puterea transmisă carcasei

Media pe o perioadă a fluxului vectorului Poynting pe suprafața exterioară a carcasei, orientat spre interior este $P = -\frac{2\pi b l}{T} \int_0^T E|_{x=g} H|_{x=g} dt$. Deoarece $H = \frac{\mu N}{l} i$ și ținând cont de

(4), rezultă $P = \frac{2\pi b N}{T} \int_0^T \frac{dA(g)}{dt} i(t) dt$. Integrând prin părți și ținând cont de periodicitatea curentului și a potențialului magnetic vector, avem

$$P = -\frac{2\pi b N}{T} \int_0^T A(g) \frac{di}{dt} dt \quad (18)$$

Dacă admitem variația liniară pe porțiuni a curentului de excitație, atunci, după câteva calcule efectuate în (17), rezultă

$$P = -\frac{2\pi b N}{T} \sum_{m=1}^M (i_{m+1} - i_m) \sum_k C_k((m-1/2)\Delta t) \Phi_k(g) \quad (19)$$

4 Exemplu

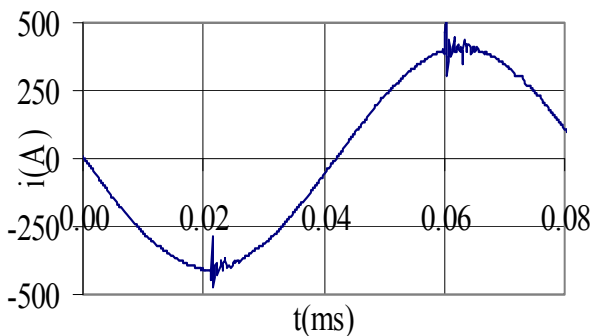


Fig.2. Curba curentului de excitație

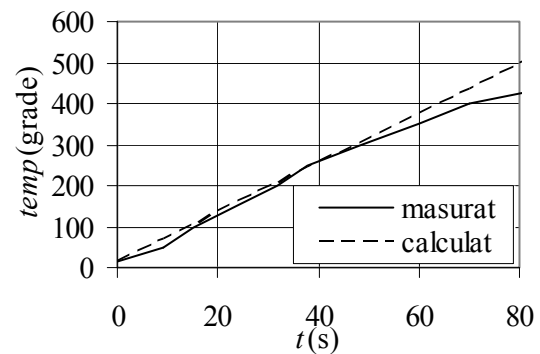


Fig.3. Evoluția temperaturii carcusei

Aplicația numerică a fost făcută pentru o carcasa de aluminiu cu parametrii $a=0.0565$ m, $g=0.004$ m, $l=0.1$ m, $\rho=2.6\cdot 10^{-8}\Omega\text{m}$, $\mu_r=1$. Bobina de excitație are 14 spire și este alimentată de un curent cu frecvența de 12 kHz (vezi Fig. 2). Puterea activă absorbită de carcasă este $P=2146.34$ W. Volumul carcasei este $V=2\pi(a+g/2)gl=1.47\times 10^{-4}\text{m}^3$. Admițând că densitatea de masă a aluminiului este $\tau=2700\text{Kg}/\text{m}^3$, deci masa carcasei este $m=0.397\text{Kg}$, iar căldura specifică este $c=900\text{J}/\text{Kg}/^\circ\text{K}$, rezultă că temperatura carcasei evoluează conform relației $\Delta\theta=\frac{P}{cm}t=6.006t$. În Fig. 3 este prezentată evoluția în timp a temperaturii carcasei, calculată în ipoteza procesului adiabatic și evoluția temperaturii măsurată cu ajutorul unei termocamere în infraroșu.

5 Concluzii

Lucrarea prezintă o metodă analitică de determinare a soluției problemei de curenți turbionari, a pierderilor și a încălzirii carcaselor conductoare neferomagnetice. Avantajul metodei constă în faptul că acuratețea soluției nu depinde de forma și frecvența curentului de excitație. O parte din mărimile ce intervin în expresia soluției depind doar de parametrii geometrici și de material ai carcasei și se pot utiliza pentru orice formă a curentului de excitație.

Bibliografie

- [1] F. Hantila, G. Preda, M. Vasiliu, T. Leuca, E. Della Giacomo, "Calculul numeric al curenților turbionari", Editura ICPE, 2001, ISBN 973-8067-31-6.
- [2] F. Hantila, E. Demeter, "Rezolvarea numerică a problemelor de câmp electromagnetic", Ed. Ari Press, ICPE-ME, 1995.
- [3] R. Albanese, G. Rubinacci, "Integral formulation for 3D Eddy-current computation using edge elements", *IEE Proc.*, 135, A, No. 7, sept. 1988.
- [4] F. Hantila, G. Preda, M. Vasiliu "Polarization method for static dields", *IEEE Transaction on Magnetics*, vol.36, no.4, pp. 672-675, Jul. 2000.
- [5] R. Albanese, F.I. Hantila, G. Rubinacci, "Integral formulation for nonlinear eddy current problem", *IGTE Symposium*, Graz, Austria, 1992.
- [6] V.S. Vladimirev, "Ecuatiile fizicii matematice", Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1980, (traducere din limba rusă).
- [7] D. Ioan, "Metode pentru calculul câmpului electromagnetic. Separarea variabilelor", Editura IPB, București, 1988.
- [8] I.Gh.Șabac, "Matematici speciale", Ed. Didactică si Pedagogică, București, 1965,
- [9] A. Angot, "Complemente de matematici pentru inginerii din electrotehnică și telecomunicații", Ed. Tehnică, București, 1966, (traducere din limba franceză).
- [10] M. Vasiliu, "Nonsinusoidal two-dimensional eddy currents in a rectangular bar", *Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. et Energ.*, no.3, pp. 315-324, 1991.
- [11] M.Vasiliu, "Eddy current core losses with trapezoidal magnetization", *Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. et Energ.*, no.1, pp. 33-45, 1992.
- [12] M.Vasiliu, I.F.Hantila, "Eigenfunction expansion in a non-sinusoidal magnetic shielding problem", *Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. et Energ.*, no.2, pp. 199-206, 1993.
- [13] M.Vasiliu, Al. Nicolae, I.F. Hantila, "Finite integral transform approach to non-sinusoidal eddy-current problems", *Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. et Energ.*, no.4, pp. 473-481, 1993.
- [14] M.Vasiliu, "Eddy currents losses due to alternating magnet pulses", *Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. et Energ.*, no.1, p. 51, 1990.
- [15] V. Stefan-Minculete, „Contribuții privind aplicarea conversiei electrotermice sau electromecanice în tehnică”, teza de doctorat, Universitatea Politehnica București, decembrie 2012.